

УДК 532.529:534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ С ПОЛИДИСПЕРСНЫМИ ПАРОГАЗОВЫМИ И ГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ

Д.А. Губайдуллин, Ю.В. Федоров

Аннотация

В работе представлена математическая модель, определяющая распространение звуковых волн в двухфракционной смеси жидкости с полидисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками с учетом фазовых превращений. Записана система интегродифференциальных уравнений возмущенного движения двухфазной смеси, получено дисперсионное соотношение, найдена равновесная скорость звука. Представлено сравнение теории с существующими экспериментальными данными. **Ключевые слова:** звуковые волны, пузырьковая жидкость, фазовые превращения, дисперсионное соотношение

Введение

Известно, что присутствие пузырьков пара или газа в жидкости существенно меняет ее акустические свойства. Имеется значительное количество работ, посвященных теоретическому исследованию распространения гармонических возмущений в таких смесях. Различные проблемы акустики смесей жидкостей с пузырьками газа или пара рассмотрены в известных монографиях [1, 2]. Описанию основных особенностей двухфазных сред пузырьковой структуры посвящена работа [3]. Здесь приведен обзор результатов исследований распространения волн в жидкостях с пузырьками постоянной массы и работ по волновой динамике жидкостей, содержащих пузырьки пара или растворимого газа. В [4] для смеси жидкости с газовыми пузырьками получена дисперсионная зависимость волнового числа от частоты колебаний и теплофизических свойств фаз в случае плоских волн, показана необходимость учета сжимаемости несущей фазы для задач акустики пузырьков жидкостей.

Задача о распространении малых возмущений в жидкости с полидисперсными пузырьками газа в той или иной постановке исследована в [5–9], а с монодисперсными пузырьками пара – в [10–13].

Результаты экспериментальных измерений скорости звука в смеси воды с пузырьками пара приведены в [14]. Сравнение эксперимента и теории проведено в [12, 13].

В работе [15] исследовано распространение акустических волн в двухфракционных смесях жидкости с монодисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками различных размеров и разного состава с фазовыми превращениями.

В настоящей работе приводится обобщение модели [15] на случай полидисперсных фракций дисперсной фазы.

1. Основные уравнения

В системе координат, связанной с невозмущенной средой, линеаризованные уравнения сохранения массы, количества пузырей, импульса, энергии и пульсационного движения имеют вид [15], обобщенный на случай полидисперсных фракций

дисперсной фазы с использованием описанной ранее процедуры [16]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= -\frac{\rho_{20}^a}{1 - k_{V0}} \left\langle \frac{k'_{V\Sigma} - k'_V}{\tau_m} \right\rangle_a, \quad \frac{\partial \rho'_V}{\partial t} + \rho_{V0} \frac{\partial v'_1}{\partial x} = \frac{\rho_{20}^a}{1 - k_{V0}} \left\langle \frac{k'_{V\Sigma} - k'_V}{\tau_m} \right\rangle_a \\
\frac{\partial \rho'_{2a}}{\partial t} + \rho_{20}^a \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= \frac{\rho_{20}^a}{1 - k_{V0}} \left\langle \frac{k'_{V\Sigma} - k'_V}{\tau_m} \right\rangle_a, \quad \frac{\partial \rho'_{2b}}{\partial t} + \rho_{20}^b \frac{\partial v'_1}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial n'_a}{\partial t} + n_0^a \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial n'_b}{\partial t} + n_0^b \frac{\partial v'_1}{\partial x} = 0, \quad \rho_{10} \frac{\partial v'_1}{\partial t} + \frac{\partial p'_1}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial T'_1}{\partial t} &= m_a \left\langle \frac{T'_{\Sigma a} - T'_1}{\tau_{T1a}} \right\rangle_a + m_b \left\langle \frac{T'_{\Sigma b} - T'_1}{\tau_{T1b}} \right\rangle_b; \quad m_a = \frac{\rho_{20}^a}{\rho_{10}}, \quad m_b = \frac{\rho_{20}^b}{\rho_{10}} \\
\frac{\partial T'_{2a}}{\partial t} &= \frac{\alpha_{20}^a}{\rho_{20}^a c_{2a}} \frac{\partial p'_{2a}}{\partial t} + \frac{T'_{\Sigma a} - T'_{2a}}{\tau_{T2a}}, \quad \frac{\partial T'_{2b}}{\partial t} = \frac{\alpha_{20}^b}{\rho_{20}^b c_{2b}} \frac{\partial p'_{2b}}{\partial t} + \frac{T'_{\Sigma b} - T'_{2b}}{\tau_{T2b}} \\
c_{p1} \left\langle \frac{T'_{\Sigma a} - T'_1}{\tau_{T1a}} \right\rangle_a + c_{2a} \left\langle \frac{T'_{\Sigma a} - T'_{2a}}{\tau_{T2a}} \right\rangle_a &= -\frac{l_0}{1 - k_{V0}} \left\langle \frac{k'_{V\Sigma} - k'_V}{\tau_m} \right\rangle_a \\
c_{p1} \left\langle \frac{T'_{\Sigma b} - T'_1}{\tau_{T1b}} \right\rangle_b + c_{2b} \left\langle \frac{T'_{\Sigma b} - T'_{2b}}{\tau_{T2b}} \right\rangle_b &= 0 \\
\frac{\partial r'_a}{\partial t} &= w'_a + \frac{m_a^o r_a}{3(1 - k_{V0})} \left\langle \frac{k'_{V\Sigma} - k'_V}{\tau_m} \right\rangle_a, \quad \frac{\partial r'_b}{\partial t} = w'_b \\
w'_a &= w'_{Aa} + w'_{Ra}, \quad w'_b = w'_{Ab} + w'_{Rb} \\
w'_{Aa} &= \frac{p'_{2a} - p'_1}{\rho_{10}^o C_1 (\alpha_{20}^a)^{1/3}}, \quad w'_{Ab} = \frac{p'_{2b} - p'_1}{\rho_{10}^o C_1 (\alpha_{20}^b)^{1/3}} \\
r_a \frac{\partial w'_{Ra}}{\partial t} + \frac{4\nu_1}{r_a} w'_{Ra} &= \frac{p'_{2a} - p'_1}{\rho_{10}^o}, \quad r_b \frac{\partial w'_{Rb}}{\partial t} + \frac{4\nu_1}{r_b} w'_{Rb} = \frac{p'_{2b} - p'_1}{\rho_{10}^o}
\end{aligned} \tag{1}$$

В качестве уравнений состояния будем использовать следующие линеаризованные соотношения [17]

$$p'_1 = C_1^2 \rho'_1, \quad \frac{p'_{2a}}{p_0} = \frac{\rho_{2a}^o}{\rho_{2a}^o} + \Delta R_a k'_V + \frac{T'_{2a}}{T_0}, \quad \frac{p'_{2b}}{p_0} = \frac{\rho_{2b}^o}{\rho_{2b}^o} + \frac{T'_{2b}}{T_0} \tag{2}$$

Условие насыщенности пара на поверхности раздела фаз примем в виде [17]

$$\frac{T'_{\Sigma a}}{T_0} = E k'_{V\Sigma} + G \frac{p'_{2a}}{p_0} \tag{3}$$

Введен следующий линейный оператор осреднения

$$\begin{aligned}
\langle h \rangle_j &= \frac{1}{\rho_{20}^j} \int_{\Delta r_j} N_0^j(r_j) g_0(r_j) h \, dr_j, \quad \rho_{20}^j = \int_{\Delta r_j} N_0^j(r_j) g_0(r_j) \, dr_j \\
g_0(r_j) &= \frac{4}{3} \pi r_j^3 \rho_{2j}^o, \quad \Delta r_j = [r_j^{\min}, r_j^{\max}], \quad j = a, b
\end{aligned}$$

Параметры межфазного взаимодействия в соответствии с работой [17] записываются следующим образом

$$\tau_{T1j} = \frac{2c_{p1} \rho_{2j}^o r_j^2}{3\text{Nu}_1 \lambda_1}, \quad \tau_{T2j} = \frac{2c_{2j} \rho_{2j}^o r_j^2}{3\text{Nu}_{2j} \lambda_{2j}}, \quad \tau_m = \frac{2r_a^2}{3\text{Sh}_1 D_1}$$

$$\begin{aligned}
\Delta R_a &= \frac{R_{V0} - R_{G0}}{R_{2a}}, E = \frac{R_{V0}R_{G0}}{R_{2a}^2}, G = k_{V0} \frac{R_{V0}}{R_{2a}} \\
R_{2a} &= k_{V0}R_{V0} + k_{G0}R_{G0}, k_{V0} = \frac{\rho_{V0}}{\rho_{20}^a}, k_{G0} = \frac{\rho_{G0}}{\rho_{20}^a}, k_{V0} + k_{G0} = 1 \\
\alpha_{10} &= \frac{\rho_{10}}{\rho_{10}^\circ}, \alpha_{10} + \alpha_{20}^a + \alpha_{20}^b = 1 \\
c_{2a} &= k_{V0}c_{pV} + k_{G0}c_{pGa}, \lambda_{2a} = k_{V0}\lambda_V + k_{G0}\lambda_{Ga}, c_{2b} = c_{pGb} \\
\rho_{2a}^\circ &= k_{V0}\rho_{V0}^\circ + k_{G0}\rho_{G0}^\circ, \rho_{2a} = \alpha_{20}^a\rho_{2a}^\circ
\end{aligned}$$

Здесь и далее нижние индексы 1 и 2 относятся к параметрам жидкой и дисперсной фазы, V и G – к паровому и газовому компонентам дисперсной фазы, Σ – к поверхности раздела фаз. Штрихи обозначают возмущения параметров, 0 – начальное невозмущенное состояние. Переменные с индексом a относятся к парогазовым пузырькам радиуса r_a , с индексом b – к пузырькам газа радиуса r_b , x – координата, t – время, ρ°, ρ – истинная и средняя плотность смеси, v_1 – скорость, p – давление, n – число пузырьков в единице объема, w – скорость радиального движения пузырьков, α – объемное содержание, λ – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, Nu – число Нуссельта, k – массовая концентрация компоненты дисперсной фазы, R_V и R_G – паровая и газовая постоянные, Sh_1 – безразмерный коэффициент массообмена или число Шервуда, l_0 – удельная теплота парообразования, D_1 – коэффициент диффузии, $N^a(r_a)$ и $N^b(r_b)$ – функции распределения пузырьков разных газов по размерам.

2. Дисперсионное соотношение

Исследуем решения $\varphi' = \{v'_1, \rho'_1, p'_1, w'_a, \dots\}$ системы уравнений (1)–(3), имеющие вид прогрессивных волн

$$\varphi' = A_\varphi \exp[i(K_*x - \omega t)] \quad (4)$$

Здесь $K_* = K + iK_{**}$, $C_p = \omega/K$, $i^2 = -1$, где K_* – комплексное волновое число, K_{**} – линейный коэффициент затухания, C_p – фазовая скорость.

Подставляя решение в виде (4) в систему уравнений (1)–(3) и из условия существования у линейной системы уравнений нетривиального решения, получено следующее дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned}
\left(\frac{K_*}{\omega}\right)^2 &= \frac{1}{C_f^2} + 3\alpha_{20}^a\rho_{10}\frac{Q_a(H_{8a} + H_{3a} + H_{9b}) - \Omega_a(1 - H_{4a} + Z_b)}{1 + Z_a + Z_b} + \\
&+ 3\alpha_{20}^b\rho_{10}\frac{Q_b(H_{8b} + H_{3b} + H_{9a}) - \Omega_b(1 - H_{4b} + Z_a)}{1 + Z_a + Z_b} \quad (5) \\
H_{9j} &= H_{8j} + H_{3j} + H_{7j}\Omega_j, Z_j = \frac{H_{7j}H_{2j}}{H_{5j}} - H_{4j}, Q_j = \frac{H_{2j}}{H_{5j}}, \Omega_j = \frac{H_{1j} + H_{6j}}{H_{5j}} \\
H_{1a} &= 3T_0V_{1a}\left\langle\frac{t_{3a}}{S_at_{2a}}\right\rangle_a + \frac{3}{E}\left\langle\frac{t_m}{S_at_{2a}}\right\rangle_a, H_{1b} = 3T_0\left\langle\frac{t_{3b}}{S_bt_{2b}}\right\rangle_b, H_{2a} = c_{p1}V_{1a}\langle t_{1a}\rangle_a \\
H_{2b} &= c_{p1}\langle t_{1b}\rangle_b, V_{1a} = \frac{\langle L_{2a}\rangle_a}{\langle L_{1a}\rangle_a}, V_{2a} = \frac{\tilde{R}_a}{\langle L_{1a}\rangle_a}, t_{1j} = \frac{1}{i\omega\tau_{T1j}} \\
H_{3a} &= 3m_aT_0\left(\left\langle\frac{t_{1a}}{t_{2a}}\right\rangle_a\left\langle\frac{t_{3a}}{S_at_{2a}}\right\rangle_a V_{2a} - \left\langle\frac{t_{1a}}{S_at_{2a}}\right\rangle_a\right), H_{3b} = -3m_bT_0\left\langle\frac{t_{1b}}{S_bt_{2b}}\right\rangle_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{4a} &= m_a \langle t_{1a} \rangle_a \left(1 - c_{p1} V_{2a} \left\langle \frac{t_{1a}}{t_{2a}} \right\rangle_a \right), H_{4b} = m_b \langle t_{1b} \rangle_b \\
H_{5a} &= V_{1a} \langle M_{4a} S_a \rangle_a - \frac{1}{ET_0} \left\langle \frac{M_{1a} t_m S_a}{t_{2a}} \right\rangle_a, H_{5b} = \langle M_{4b} S_b \rangle_b \\
H_{6a} &= V_{1a} \langle M_{4a} \rangle_a - \frac{1}{ET_0} \left\langle \frac{M_{1a} t_m}{t_{2a}} \right\rangle_a, H_{6b} = \langle M_{4b} \rangle_b \\
H_{7a} &= \langle M_{3a} S_a \rangle_a - m_a V_{2a} \langle M_{4a} S_a \rangle_a \left\langle \frac{t_{1a}}{t_{2a}} \right\rangle_a, H_{7b} = \langle M_{3b} S_b \rangle_b \\
H_{8a} &= -\langle M_{3a} \rangle_a + m_a V_{2a} \langle M_{4a} \rangle_a \left\langle \frac{t_{1a}}{t_{2a}} \right\rangle_a, H_{8b} = -\langle M_{3b} \rangle_b \\
M_{1a} &= \frac{3T_0}{S_a} - \frac{T_0}{p_0} - \frac{\alpha_{20}^a t_{2a}}{\rho_{20}^a c_{2a}} \left(1 - \frac{1}{t_{2a}} \right) + \frac{GT_0}{p_0} t_{2a}, M_{2a} = \frac{GT_0}{p_0} t_{3a} + \frac{\alpha_{20}^a}{\rho_{20}^a} t_{2a} \\
M_{1b} &= \frac{3T_0}{S_b} - \frac{T_0}{p_0} - \frac{\alpha_{20}^b t_{2b}}{\rho_{20}^b c_{2b}} \left(1 - \frac{1}{t_{2b}} \right), M_{2b} = \frac{\alpha_{20}^b}{\rho_{20}^b} t_{2b}, L_{1a} = \frac{l_0}{k_{G0}} + \tilde{R}_a \frac{t_{3a}}{t_{2a}} \\
M_{3a} &= m_a \frac{GT_0}{p_0} t_{1a} - m_a \frac{M_{1a} t_{1a}}{t_{2a}}, M_{4a} = M_{2a} - \frac{t_{3a} M_{1a}}{t_{2a}}, t_m = \frac{1}{i\omega\tau_m} \\
M_{3b} &= -m_b \frac{M_{1b} t_{1b}}{t_{2b}}, M_{4b} = M_{2b} - \frac{t_{3b} M_{1b}}{t_{2b}}, L_{2a} = 1 - \frac{\tilde{R}_a}{ET_0} \frac{t_m}{t_{2a}} - t_m \\
t_{2j} &= \frac{1}{1 - i\omega\tau_{T2j}}, t_{3j} = c_{p1} t_{1j} - c_{2j} t_{2j}, \tilde{R}_a = \left(\Delta R_a + \frac{1 - m_a^\circ}{k_{G0}} \right) T_0
\end{aligned}$$

Выделим отдельно случай $k_{V0} = 1, k_{G0} = 0$, когда в жидкости имеются не парогазовые, а чисто паровые пузырьки. В этом случае, в дисперсионном соотношении (5) изменятся следующие величины

$$\begin{aligned}
\Delta R_a &= 1, V_{1a} = \frac{m_a^\circ - 1}{E} \frac{\langle t_m/t_{2a} \rangle_a}{\langle l_0 + T_0(1 - m_a^\circ) t_{3a}/t_{2a} \rangle_a} \\
V_{2a} &= \frac{(1 - m_a^\circ) T_0}{\langle l_0 + T_0(1 - m_a^\circ) t_{3a}/t_{2a} \rangle_a}, G = 1
\end{aligned}$$

Поскольку величина E в выражениях сокращается, можно принять $E = 1$.

Выражение для равновесной скорости звука C_e в двухфракционной смеси жидкости с полидисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками получено из дисперсионного соотношения (5) при предельном переходе $\omega \mapsto 0$, и имеет следующий вид

$$C_e = \left(\frac{1}{C_f^2} + \frac{\rho_{10}}{p_0} \frac{\xi_1 + \xi_2 - \xi_3}{\xi_4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\xi_1 = k_{G0} m_1 (ET_0(\alpha_{20}^a + \alpha_{20}^b) + G\tilde{R}_a \alpha_{20}^a), \xi_2 = m_a l_0 (1 - G)(\alpha_{20}^a + \alpha_{20}^b)/c_{p1}$$

$$\xi_3 = \frac{k_{G0} p_0}{c_{p1}} \left(\frac{\tilde{R}_a \alpha_{20}^a}{T_0} + E(\alpha_{20}^a + \alpha_{20}^b) \right) \left(\frac{m_a}{\rho_{2a}^\circ} + \frac{m_b}{\rho_{2b}^\circ} \right)$$

$$\xi_4 = \frac{m_a l_0}{c_{p1}} + m_1 ET_0 k_{G0}, m_1 = 1 + \frac{m_a c_{2a}}{c_{p1}} + \frac{m_b c_{2b}}{c_{p1}}$$

В случае, когда паровая составляющая отсутствует, т.е. $k_{V0} \mapsto 0, l_0 \mapsto 0$, равновесная скорость звука (6) совпадает с полученным ранее в [8] выражением C_e .

3. Результаты расчетов

Исследуем распространение звуковых волн в двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия при следующих значениях параметров смеси: $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 \in [293, 371]$ К, $Nu_1 = 3$, $Nu_{2j} = 10$, $Sh_1 = 10$, для значений теплофизических параметров фаз используются данные справочника [18]. Расчеты проведены с помощью дисперсионного соотношения (5).

На рис. 1 показаны результаты сравнения зависимостей фазовой скорости (*а, б*) и линейного коэффициента затухания (*в, г*) от частоты возмущений $f = \omega/2\pi$ для разного фракционного состава дисперсной фазы при объемном содержании паровоздушных пузырьков $\alpha_{20}^a = 0.01$ и пузырьков гелия $\alpha_{20}^b = 0.001$, при начальной концентрации пара $k_{V0} = 0.5$. Кривые 1, 4 построены для полидисперсной среды при значениях радиусов пузырьков $r_a \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ м, $r_b \in [10^{-6}, 10^{-5}]$ м с разными функциями распределения пузырьков по размерам. Для кривой 1 функция распределения пузырьков по размерам выбрана в виде $N_0^j(r_j) = r_j^{-3}$, а для кривой 4 – $N_0^j(r_j) = \exp(-r_j^2/2)$. Кривые 2 построены для монодисперсной сре-

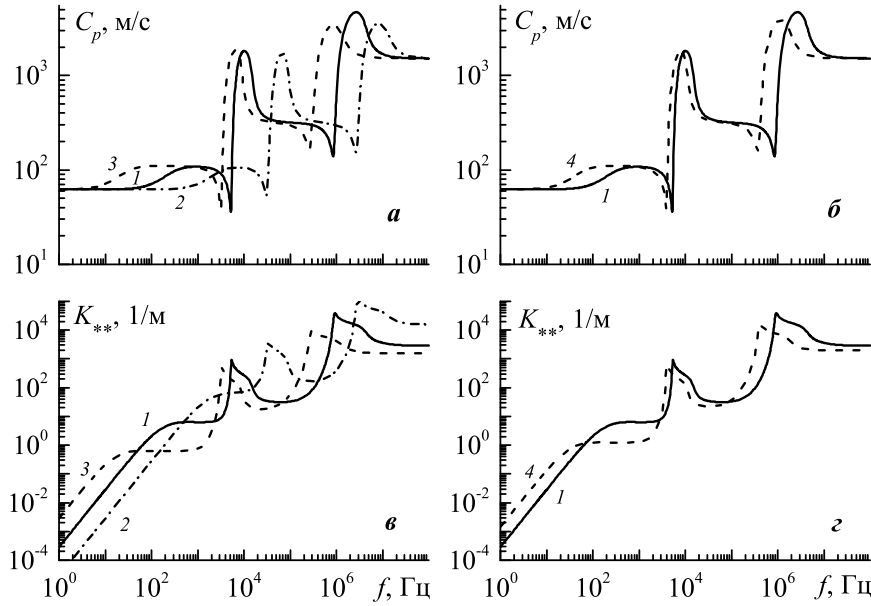


Рис. 1. Зависимости фазовой скорости (*а, б*) и линейного коэффициента затухания (*в, г*) от частоты возмущений

ды при фиксированных радиусах пузырьков $r_{a0} = 10^{-4}$ м, $r_{b0} = 10^{-6}$ м, кривые 3 – при $r_{a0} = 10^{-3}$ м, $r_{b0} = 10^{-5}$ м. Рассчитанные значения (2, 3) получены с помощью дисперсионного соотношения [15]. Наличие двух фракций пузырьков различных начальных радиусов приводит к возникновению двух локальных минимумов в зависимостях фазовой скорости (*а, б*) и двух локальных максимумов в зависимостях линейного коэффициента затухания (*в, г*). Это связано с различием значений резонансных частот собственных колебаний пузырьков каждой фракции.

Для полидисперсных пузырьков (кривые 1) минимумы C_p и максимумы K_{**} находятся между соответствующими минимумами и максимумами для случая двух фракций монодисперсных пузырьков (кривые 2, 3). Выбор различных функций распределения приводит к изменению эффективного среднего радиуса пузырьков и, соответственно, к изменению резонансной частоты пузырьков, тем самым оказывает существенное влияние на дисперсию и диссипацию звуковых волн (кривые 1, 4).

4. Сравнение теории с экспериментом

Результаты измерения скорости звука в воде с пузырьками пара при значениях параметров смеси $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 373$ К приведены в [14]. Радиус пузырьков r_a изменялся в интервале $10^{-5} - 10^{-4}$ м. Точных измерений объемного содержания пузырьков не проводилось. Авторы эксперимента приблизительно оценили, что данная величина варьируется в интервале от 0.03 до 0.3 %.

На рис. 2 представлено сравнение зависимостей скорости звука от частоты возмущений с данными результатами измерений, при условии, что нет второй фракции пузырьков. Теоретические кривые соответствуют трем случаям: 1 – $k_{V0} = 0$ (вода/воздух), 2 – $k_{V0} = 0.9$ (вода/воздух/пар), 3 – $k_{V0} = 1$ (вода/пар). Объемное содержание предполагалось равным 0.14 %. Несмотря на большой разброс экспери-

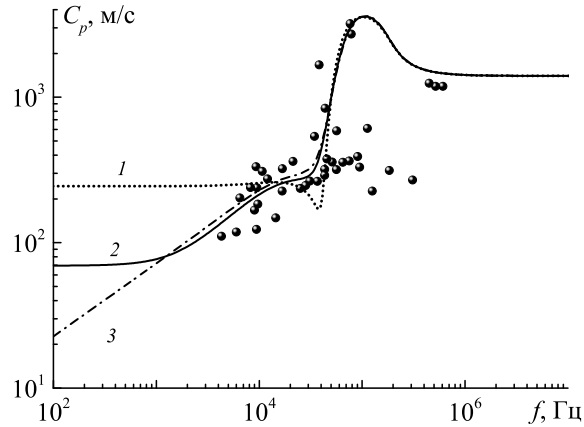


Рис. 2. Сравнение рассчитанных значений (1), (2), (3) фазовой скорости C_p с экспериментальными данными

ментальных данных, удастся проследить на качественном уровне влияние фазовых переходов. По крайней мере, на частотах от 10^3 до 10^5 Гц явно прослеживается перегиб кривой зависимости фазовой скорости от частоты возмущений под влиянием массообмена. Для более детальной проверки теории необходимы дополнительные экспериментальные данные.

Заключение

Теоретически исследовано распространение звуковых волн в жидкости с парогазовыми пузырьками и пузырьками нерастворимого газа с учетом полидисперсности включений, а также фазовых превращений. Проанализировано влияние по-

лидисперсности пузырьков на дисперсию и диссипацию звуковых волн. В частном случае, когда жидкость состоит только из паровых пузырьков, приведено сопоставление теории с имеющимися экспериментальными данными для зависимости скорости звука от частоты возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-4294.2013.1, МК-2244.2014.1), РФФИ (№13-01-00135).

Summary

D.A. Gubaidullin, Yu.V. Fedorov. Propagation of sound waves in liquid with polydisperse vapor-gas and gas bubbles.

In paper the mathematical model defining propagation of sound waves in a two-fraction mixture of a liquid with polydisperse vapor-gas and gas bubbles with phase transformations is presented. The system of the integro-differential equations of the perturbed motion of two-phase mixture is written, dispersion relation is obtained, equilibrium sound speed is found. Comparison of the theory with existing experimental data is presented. **Key words:** (sound waves, bubbly liquid, phase transformations, dispersion relation)

Литература

1. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
2. *Нагоряков В.Е., Покусев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо-и парожидкостных сред. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 248 с.
3. *Губайдуллин А.А., Ивандеев А.И., Нигматуллин Р.И., Хабеев Н.С.* Волны в жидкостях с пузырьками // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНТИ, 1982. – Т.17. – С. 160–249.
4. *Нигматуллин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К.* Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 304. – № 5. – С. 1077–1081.
5. *Шагапов В.Ш.* Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // ПМТФ. – 1977. – № 1. – С. 90–101.
6. *Губайдуллин Д.А., Губайдуллина Д.Д., Федоров Ю.В.* Акустические волны в жидкостях с полидисперсными пузырьками газа. Сравнение теории с экспериментом // Изв. РАН. МЖГ. – 2013. – № 6. – С. 81–90.
7. *Нигматуллин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Акустические волны разной геометрии в полидисперсных пузырьковых жидкостях. Теория и эксперимент // Докл. РАН. – 2013. – Т. 450. – № 6. – С. 665–669.
8. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // ПММ. – 2013. – Т. 77. – № 5. – С. 743–753.
9. *Нигматуллин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях // Докл. РАН. – 2012. – Т. 447. – № 3. – С. 284–287.
10. *Нагоряков В.Е., Покусев Б.Г., Прибатурин Н.А., Шрейбер И.Р.* Акустика жидкости с пузырьками пара // Акуст. журн. – 1984. – Т. 30. – № 6. – С. 808–812.
11. *Drumheller D.S., Bedford A.* A theory of liquids with vapor bubbles // J. Acoust. Soc. Am. – 1980. – V. 67. – № 1. – P. 186–200.

12. *Chung N.M., Lin W.K.* Sound velocity and its relationship with interfacial area density in a steam/water, two-phase bubbly flow // *Flow Measurements and Instrumentation*. – 1992. – V. 3. – № 2. – P. 65–71.
13. *Ardron K.H., Duffey R.B.* Acoustic wave propagation in a flowing liquid-vapour mixture // *Int. J. Multiphase Flow*. – 1978. – V. 4. – P. 303–322.
14. *Feldman C.L., Nydick S.E., Kokernak R.P.* The speed of sound in single-component two-phase fluids: theoretical and experimental // *Progr. Heat and Mass Transfer*. – 1972. – V. 6. – P. 671–684.
15. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н.* Акустические волны в двухфракционных пузырьковых жидкостях с фазовыми переходами // *Теплофизика высоких температур*. – 2012. – Т. 50. – № 2. – С. 269–273.
16. *Губайдуллин Д.А.* Динамика двухфазных парогазокапельных сред. – Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1998. – 153 с.
17. *Азаматов А.Ш., Шагапов В.Ш.* Распространение малых возмущений в парогазожидкостной среде // *Акуст. журн.* – 1981. – Т. 27. – № 2. – С. 161–169.
18. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972. – 721 с.

Губайдуллин Дамир Анварович – докт. физ.-мат. наук, профессор, директор Института механики и машиностроения КазНЦ РАН

E-mail: gubajdullin@mail.knc.ru

Федоров Юрий Валентинович – аспирант Института механики и машиностроения КазНЦ РАН

E-mail: yurafedorov89@gmail.com